PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE

I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

27 novembre 2013

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	E
2	B
3	E
4	E
5	B
6	E
7	C
8	B

Problema	Risposta corretta
9	E
10	C
11	B
12	C
13	C
14	B
15	A
16	A

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(E)**.
Il numero n di soldatini di Alberto è un numero di due cifre, compreso tra 30 e 99. Poiché disponendo i soldatini in fila per 10 ne avanzano due, la cifra della unità di n è 2. Poiché disponendoli in fila per 7 ne avanza 1, n è della forma $7k + 1$, dove k è un numero naturale. L'unico numero compreso tra 30 e 99 di questa forma che termina con 2 è 92.
[Problema proposto da S. Monica]

2. La risposta è **(B)**.
Indichiamo con A il matematico che mente lunedì, martedì e mercoledì, e con B quello che mente giovedì, venerdì e sabato. La conversazione non può essere avvenuta di lunedì perché B, che non mente né di lunedì né di domenica, avrebbe mentito. Per un motivo analogo la conversazione non può essere avvenuta né di martedì né di mercoledì. In modo simile possiamo escludere il venerdì, il sabato, e la domenica perchè A, che in questi giorni non mente, non direbbe la verità. L'unico giorno possibile è il giovedì, in cui in effetti la conversazione può essere avvenuta: A afferma il vero (il giorno precedente ha mentito) e B afferma il falso (il giorno precedente non ha mentito) e questo è compatibile con le ipotesi del problema.
[Problema proposto da F. Mugelli]

3. La risposta è **(E)**.
Ad ogni lancio della moneta la probabilità di ottenere testa è la stessa, indipendentementente dagli esiti dei lanci precedenti. Dato che la moneta non è truccata questa probabilità è $1/2$.
[Problema proposto da P. Leonetti]

4. La risposta è **(E)**.
Poiché Andrea ottiene TRE+TRE=SEI, e la corrispondenza tra lettere e numeri è biunivoca, si deduce che i due numeri che lui somma sono uguali ad uno stesso numero, che chiamiamo N. Proviamo tramite degli esempi che nessuna delle affermazioni contenute nelle risposte **(A)**, **(B)**, **(C)** e **(D)** è necessariamente vera. Scegliendo $N = 325$ (dunque E=5) si vede che **(A)** e **(D)** non sono verificate; analogamente, se $N = 175$ (dunque S=3) si vede che **(B)** non è verificata; se $N = 162$ (quindi E=2) si vede che **(C)** non è verificata.
[Problema proposto da A. D'Andrea]

5. La risposta è **(B)**.
Sia P la popolazione di Zoranel fino al 2013. La percentuale degli androidi di vigilanza sulla popolazione totale risultava in quell'anno uguale a $q = \frac{5}{100}\frac{60}{100} = \frac{3}{100}$ ed il numero di tali androidi di vigilanza uguale a qP. Dopo l'arrivo degli esiliati, la popolazione salì a $P' = P + \frac{10}{100}P = \frac{11}{10}P$, mentre la percentuale degli androidi di vigilanza sul totale scese al valore $q' = \frac{qP}{P'} = q\frac{10}{11}$. Dunque la percentuale scese di $q - q' = \frac{1}{11}q$, che è inferiore a $\frac{1}{10}q$.
[Problema proposto da A. Sambusetti]

6. La risposta è **(E)**.
Indichiamo con M, F, C e B rispettivamente il numero di matematici, fisici, chimici e biologi presenti al convegno. Sappiamo che

$$\begin{cases} M + F + C + B = 30, \\ F + B = \dfrac{M}{2}, \\ F + C = 2B, \\ F \geq 1. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione segue che M deve essere pari e dalla quarta segue che $M > 0$. Dalla prima e la seconda equazione otteniamo

$$3M + 2C = 60 \tag{1}$$

e sottraendo la seconda dalla terza troviamo

$$C - B = 2B - \frac{M}{2} \quad \Rightarrow \quad 2C + M = 6B.$$

Sottraendo l'ultima relazione trovata dalla (1) si trova

$$M = 30 - 3B$$

che ci dice che M deve essere divisibile per 3. Quindi M è positivo e divisibile per 6. D'altra parte deve essere $M < 30$ quindi M può essere solo uno dei valori: 6, 12, 18, 24. Per $M = 6$ troviamo $B = 8$ e $F + B = F + 8 = M/2 = 3$ che è impossibile, perché implica $F < 0$. Per $M = 12$ troviamo $B = 6$ e $F + B = F + 6 = M/2 = 6$ che è altrettanto impossibile perché implica $F = 0$. Se $M = 24$ dalla (1) segue $C < 0$ e quindi anche il valore 24 è da scartare. L'unica possibilità è $M = 18$ che risulta compatibile con i dati, e porta infatti a: $B = 4$, $F = 5$, $C = 3$.
[Problema proposto da S. Mongodi]

7. La risposta è **(C)**.
Le coppie sono del tipo $(k, k+1007)$. Sappiamo che k divide $k+1007$ se e solo se k divide 1007. Poiché $1007 = 19 \cdot 53$, e dato che i numeri 19 e 53 sono primi, gli unici k possibili risultano $k = 1, 19, 53, 1007$.
[Problema proposto da G. Barbarino]

8. La risposta è **(B)**.
Indichiamo con x il numero di ciliegie mangiate da Alberto, e con N il numero di persone tra cui le divide (incluso se stesso), quindi $N > 3$. Allora abbiamo
$$x = \frac{756}{N} + 3 \cdot \frac{756}{4N} = \frac{7 \cdot 756}{4N} = \frac{7 \cdot 189}{N} = \frac{3^3 \cdot 7^2}{N}.$$
Dunque N divide $3^3 \cdot 7^2$ e quindi i suoi divisori primi possono essere solo 3 e 7. Se N non fosse divisibile per 7, dovrebbe essere $N = 9$ oppure $N = 27$, ma entrambi questi valori non sono ammissibili perchè portano a un valore di x strettamente minore di 150. Dunque N è un multiplo di 7, che ha come unico eventuale altro divisore primo 3. L'unico numero con queste proprietà per cui x risulta maggiore o uguale a 150 è $N = 7$, per cui si ottiene $x = 27 \cdot 7 = 189$
[Problema proposto da G. Bresciani]

9. La risposta è **(E)**.
Consideriamo il numero $n = 2^5 = 32$ che ha esattamente 6 divisori: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Il suo quadrato $n^2 = 2^{10} = 1024$ ha esattamente 11 divisori, ovvero tutti i numeri della forma 2^k, con $k = 0, 1, 2, \ldots, 10$. Questo esempio porta ad escludere le risposte **(B)**, **(C)** e **(D)**. D'altra parte se consideriamo $n = 12$ vediamo che anch'esso ha esattamente 6 divisori: 1, 2, 3, 4, 6, 12; il suo quadrato $n^2 = 144 = 2^4 \cdot 3^2$ ha come divisori tutti i numeri della forma $2^k \cdot 3^h$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$ e $h = 0, 1, 2$, che sono in tutto 15. Quindi la risposta **(A)** non è corretta e vediamo che il numero di divisori di n^2 in generale dipende da n.
[Problema proposto da A. Bianchi]

10. La risposta è **(C)**.
Sia H l'altezza del trapezio ed h l'altezza del triangolo EDC sulla base DC. Considerando la retta parallela alle basi del trapezio e passante per E, segue dal teorema di Talete che $h = \frac{1}{2}H$. L'area del triangolo è allora $\mathcal{A}(DCE) = \frac{1}{2}(h \cdot DC) = \frac{1}{4}(H \cdot DC)$ mentre l'area del trapezio è uguale a $\mathcal{A}(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + DC)H$. Dunque $\frac{\mathcal{A}(DCE)}{\mathcal{A}(ABCD)} = \frac{DC}{2(AB+DC)} = \frac{DC}{2(3DC+DC)} = \frac{1}{8}$.
[Problema proposto da P. Negrini]

11. La risposta è **(B)**.
Indichiamo i vertici del cubo con le lettere da A a H, in modo che $ABCD$ (in quest'ordine) sia una faccia; chiamiamo E, F, G, H i vertici della faccia opposta, in modo che il vertice A sia collegato con uno spigolo ad E, il vertice B sia collegato ad F, il vertice C a G, e infine D ad H. Il percorso $ABCDHGFE$ è un percorso lungo 7 che tocca tutti i vertici del cubo.
Per dimostrare che non ne esiste uno più corto, osserviamo che ogni percorso che tocca tutti e gli 8 vertici del cubo è costituito da (almeno) 7 percorsi che partono da un vertice del cubo e ne raggiungono un altro. Ma visto che due vertici qualunque del cubo distano tra loro almeno 1, la lunghezza totale deve essere almeno 7.
[Problema proposto da F. Poloni]

12. La risposta è **(C)**.
Indichiamo con ABC il triangolo, con A il vertice comune alla circonferenza, e con B',C' rispettivamente i due punti di intersezione dei lati AB, AC con essa. Notiamo che, per simmetria, il lato $B'C'$ è parallelo a BC, dunque $AB'C'$ è simile a ABC ed è equilatero. Il centro del cerchio coincide dunque col baricentro del triangolo $AB'C'$; se $r = \frac{\sqrt{6}}{2}$ è il raggio del cerchio, l'altezza h del triangolo $AB'C'$ vale allora $h = \frac{3}{2}r$ ed il lato $AB' = \frac{2}{\sqrt{3}}h = \sqrt{3}r$. L'area del triangolo più piccolo vale quindi $\mathcal{A}(AB'C') = \frac{1}{2}h \cdot AB' = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$, mentre l'area della parte di cerchio non coperta dal triangolo vale $\mathcal{A} = \frac{2}{3}[\pi r^2 - \mathcal{A}(AB'C')] = \frac{2}{3}[\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}]r^2 = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}$.
[Problema proposto da C. Balocchi]

13. La risposta è **(C)**.
Dobbiamo calcolare la probabilità p_1 che le due palline estratte siano entrambe blu e la probabilità p_2 che le due palline estratte siano entrambe rosse. La probabilità cercata è la somma di p_1 e p_2. La probabilità p_1 può essere calcolata in questo modo: la probabilità che la prima pallina estratta sia blu è $\frac{8}{15}$; se la prima pallina estratta è blu, al momento della seconda estrazione nel sacchetto ci sono 7 palline blu e 7 palline rosse, e quindi la probabilità che la seconda pallina estratta sia blu è $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$. Quindi abbiamo $p_1 = \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{15}$.

Calcoliamo adesso p_2 in modo analogo. La probabilità che la prima pallina estratta sia rossa è $\frac{7}{15}$; se la prima pallina estratta è rossa, al momento della seconda estrazione nel sacchetto ci sono 8 palline blu e 6 palline rosse, e quindi la probabilità che la seconda pallina estratta sia rossa è $\frac{6}{14} = \frac{3}{7}$. Quindi abbiamo $p_2 = \frac{7}{15} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{5}$.

Concludiamo trovando $p_1 + p_2 = \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$, che è la risposta cercata.
[Problema proposto da S. Monica.]

14. La risposta è **(B)**.
Calcoliamo con il teorema di Pitagora le distanze $MP_1 = \sqrt{d^2+64}$ e $SP_2 = \sqrt{d^2+100}$. Il percorso più breve ottenuto passando per la porta P_1 ha allora lunghezza $L_1 = 10+\sqrt{d^2+64}$, mentre il percorso più breve passando per la porta P_2 ha lunghezza $L_2 = 8 + \sqrt{d^2+100}$. La disuguaglianza $L_1 > L_2$ si scrive

$$\sqrt{d^2+100} - \sqrt{d^2+64} < 2.$$

Quadrando ambo i membri (chiaramente positivi) e isolando la radice, si ottiene la disequazione equivalente $\sqrt{d^2+100} \cdot \sqrt{d^2+64} > d^2 + 80$, e prendendone ancora il quadrato otteniamo $4d^2 > 80^2 - 100 \cdot 64 = 0$, che è verificata per ogni $d \neq 0$.
[Problema proposto da S. Di Trani]

15. La risposta è **(A)**.
Scriviamo:

$$(x^2+x+1)^{100} = \underbrace{(x^2+x+1) \cdot (x^2+x+1) \cdot \dots \cdot (x^2+x+1)}_{100 \text{ volte}}.$$

Il risultato di questo prodotto è una somma di monomi, ciascuno dei quali è il prodotto di uno dei tre monomi della prima parentesi tonda, per uno dei tre monomi della seconda, per uno dei tre della terza, e così via fino a uno dei tre monomi dell'ultima parentesi tonda. Se ad esempio da ciascuna parentesi tonda scegliamo il monomio x^2 otteniamo il termine x^{200}. Se invece scegliamo dalla prima parentesi il monomio x e da tutte le altre il monomio x^2 otteniamo x^{199}. Questo accade tutte le volte che scegliamo da una delle 100 parentesi il monomio 1 e da tutte le altre x^2; dato che abbiamo 100 modi diversi per farlo, alla fine abbiamo che il termine x^{199} compare nella somma almeno 100 volte.

Osserviamo infine che non ci sono altre scelte che portano a termini x^{199}; infatti se da almeno due parentesi non scegliamo il monomio x^2, comunque si scelgano i monomi da tutte le altre il prodotto avrà grado minore o uguale a 198. Quindi il coefficiente di x^{199} è 100.
[Problema proposto da F. Poloni]

16. La risposta è **(A)**.
Si traccino i segmenti DG, EH ed FG paralleli ai lati del quadrato come in figura; chiaramente, $FG = 1$ e, poiché il triangolo ABC è simile al triangolo FGH, risulta $HG = \frac{1}{2}$. Pertanto, l'area del triangolo FGH vale $\mathcal{A}(FGH) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ m^2, e l'area della parte ombreggiata è $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ m^2.
[Problema proposto da F. Mugelli]